

سوالات استخدامی

ریاضی

و آمار مقدماتی

در آزمون های استخدامی

با پاسخنامه تشریحی و کلیدی

سوالات ریاضی و آمار مقدماتی در آزمون های استخدامی

۱ - حاصل $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \sqrt{48}$ برابر کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) ۵ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۷

پاسخ سوال ۱: گزینه ۴ صحیح است.

مخرج را گویا می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \sqrt{48} &= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{4-3} + \sqrt{16 \times 3} \\ &= \frac{4+3-4\sqrt{3}}{1} + 4\sqrt{3} = 7 \end{aligned}$$

۲ - حاصل $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} + \frac{1}{1-\sqrt{2}}$ برابر کدام است؟

- (۱) $-2\sqrt{2}$ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ سوال ۲: گزینه ۲ صحیح است.

عبارت اول را از رادیکال بیرون آورده و مخرج عبارت دوم را گویا می کنیم:

$$\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \underbrace{1-\sqrt{2}}_{\text{منفی}} + \frac{1+\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1-1-\sqrt{2} = -2$$

۳ - حاصل $\frac{1}{3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}-1$ (۲) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (۳) $(\sqrt{3}+1)$ (۴) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

پاسخ سوال ۳: گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{3}} &= \frac{1}{3\sqrt{4 \times 2}-\sqrt{25 \times 2}+\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

۴ - حاصل عبارت $\sqrt[3]{a^n \sqrt{a^n}}$ کدام است؟
 (۱) $\sqrt{a^{2n}}$ (۲) $\sqrt[3]{a^n}$ (۳) $\sqrt{a^n}$ (۴) $\sqrt[3]{a^{2n}}$

پاسخ سوال ۴: گزینه ۳ صحیح است.

$$\sqrt[3]{a^n \sqrt{a^n}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^{2n}} \times a^n} = \sqrt[6]{a^{3n}} = \sqrt{a^n}$$

۵ - حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{18}}$ کدام است؟
 (۱) $\frac{2}{7}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

پاسخ سوال ۵: گزینه ۲ صحیح است.

ابتدا مخرج هر یک از کسرها را گویا می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{11}-\sqrt{4}}{\sqrt{11}-\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{11}} \\ \times \frac{\sqrt{18}-\sqrt{11}}{\sqrt{18}-\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{25}+\sqrt{18}} \times \frac{\sqrt{25}-\sqrt{18}}{\sqrt{25}-\sqrt{18}} \end{aligned}$$

سوالات ریاضی و آمار مقدماتی در آزمون های استخدامی

۶ - حاصل عبارت $\sqrt[3]{-125} - \sqrt{(-5)^2}$ برابر است با: (۱) صفر (۲) ۱۰ (۳) -۱۰ (۴) هیچ کدام

پاسخ سوال ۶: گزینه ۳ صحیح است.

$$\sqrt[3]{-125} - \sqrt{25} = \sqrt[3]{(-5)^3} - \sqrt{5^2} = -5 - 5 = -10$$

۷ - حاصل عبارت $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$ کدام است؟ (۱) $-\sqrt{2}$ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

پاسخ سوال ۷: گزینه ۲ صحیح است.

می دانیم $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$ پس:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} &= (1-\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} \times [(1+\sqrt{2})^2]^{\frac{1}{6}} \\ &= (1-\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} (\sqrt{2}+1)^{\frac{1}{3}} = [(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)]^{\frac{1}{3}} = (1-2)^{\frac{1}{3}} = -1 \end{aligned}$$

۸ - حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2}+\sqrt{3})$ کدام است؟ (۱) $\sqrt{3}$ (۲) ۲ (۳) $1+\sqrt{3}$ (۴) $2\sqrt{3}$

پاسخ سوال ۸: گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا با فرض $A = \sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2}+\sqrt{3}$ طرفین را به توان دو می رسانی:

$$\begin{aligned} A^2 &= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}-\sqrt{3} \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ &= 4 + 2(\sqrt{4}-3) = 6 \Rightarrow A = \sqrt{6} \quad (*) \end{aligned}$$

از طرفی:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad (**)$$

بنابراین با توجه به (*) و (**): حاصل عبارت داده شده برابر است با:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3} + \sqrt{2}+\sqrt{3}) (\sqrt[3]{2\sqrt{2}}) = (\sqrt{6})(\sqrt{2}) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

۹- اگر $P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{9}{2}$

پاسخ سوال ۹: گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\begin{cases} P(A) = 3P(A \cap B) \\ P(B) = \frac{3}{2}P(A \cap B) \end{cases} \quad (1)$$

با توجه به قوانین احتمال داریم:

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} \xrightarrow{(1)} \\ &= \frac{3P(A \cap B) + \frac{3}{2}P(A \cap B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{5}{2}P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

۱۰. حاصل $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \sqrt[4]{4}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) ۱

پاسخ سوال ۱۰: گزینه ۳ صحیح است.

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} \quad \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} = 2$$

۱۱- اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(B) = \frac{1}{3}$ و A و B مستقل باشند، $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{6}$

پاسخ سوال ۱۱: گزینه ۴ صحیح است.

➡ یادآوری: هرگاه دو پیشامد مستقل باشند، متممهای آنها

هم پیشامدهای مستقل هستند. پس:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$= P(A) + (1 - P(B)) - P(A)P(B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3+4-1}{6} = \frac{5}{6}$$

☞ نکته: اگر A و B مستقل باشند، هر متمم اسم آن مستقل است.

۱۲- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، کدام گزینه صحیح است؟

$P(A - B) = P(A) \times P(B')$ (۲)

$P(A - B) = P(A) - P(B)$ (۱)

$P(A - B) = P(B - A)$ (۴)

$P(A - B) = P(A) \times P(B)$ (۳)

پاسخ سوال ۱۲: گزینه ۲ صحیح است.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند

آن گاه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و متممهای آنها نیز مستقل اند:

$\Rightarrow P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۱. مقدار $\log_5^{626}$ بین کدام دو مقدار قرار دارد؟

- (۱) $\frac{1}{4} < A < \frac{1}{5}$ (۲) $5 < A < 6$ (۳) $4 < A < 5$ (۴) $-5 < A < -4$

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$A = \log_5 626, 626 = 625 + 1 = 5^4 + 1 \Rightarrow 5^4 < 626 < 5^5$$

راه اول:

$$\Rightarrow \log_5 5^4 < \log_5 626 < \log_5 5^5 \Rightarrow 4 \log_5 5 < A < 5 \log_5 5 \Rightarrow 4 < A < 5$$

$$A = \log_5 626 \Rightarrow 5^A = 626, 5^4 < 626 < 5^5 \Rightarrow 5^4 < 5^A < 5^5 \Rightarrow 4 < A < 5$$

راه دوم:

۲. به عدد ۳۰۱ چند واحد بیفزاییم تا لگاریتم عدد حاصل در مبنای ۸ برابر ۳ گردد؟

- (۱) ۱۰۳ (۲) ۱۱۲ (۳) ۲۱۱ (۴) ۳۰۱

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$\log_8 (x + 301) = 3 \Rightarrow x + 301 = 8^3 = 512 \Rightarrow x = 512 - 301 = 211$$

www.file99.ir

۳. معادله $9^x + 3^x - 2 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۰

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$3^x = a > 0 \Rightarrow 9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ a = -2 \end{cases}$$

غقق

بنابراین معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد.

۴. اگر $\log 2 = m$ و $\log 3 = n$ آنگاه $\log 375$ کدام است؟

- (۱) $m - n - 3$ (۲) $m + n - 2$ (۳) $3m - n + 3$ (۴) $3 + n - 3m$

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\log 375 = \log 125 \times 3 = \log 5^3 \times 3 = 3 \log 5 + \log 3 = 3(1 - \log 2) + \log 3 = 3(1 - m) + n$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۱. اگر $\log_2 = 0.301$ باشد در عدد $\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$ چند صفر متوالی بعد از ممیز وجود دارد؟

- ۱۷ (۱) ۱۸ (۲) ۱۹ (۳) ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ی «۲»

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{60} = A \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^{60} = \log A \Rightarrow 60 \cdot \log \frac{1}{2} = \log A \Rightarrow -60 \cdot \log 2 = \log A$$

$$\log A = -60 \cdot (0.301) = -18.06 \rightarrow A = 10^{-18.06}$$

$$10^{-19} < 10^{-18.06} < 10^{-18}$$

لذا تعداد صفرهای بعد از ممیز ۱۸ تاست.

۲. اگر مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع $f(x) = \log(ax + \sqrt{9x^2 + 1})$ باشد، کدام a است؟

- ۱ (۱) ۲ و ۱ (۲) ۳ و -۳ (۳) ۳ و ۱ (۴)

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$f(x) = \log(ax + \sqrt{9x^2 + 1})$$

چون مبدأ مختصات مرکز تقارن تابع است، لذا تابع باید فرد باشد. یعنی باید شرط $f(x) + f(-x) = 0$ برقرار باشد.

$$f(-x) = \log(-ax + \sqrt{9x^2 + 1})$$

$$f(x) + f(-x) = \log(ax + \sqrt{9x^2 + 1}) + \log(-ax + \sqrt{9x^2 + 1})$$

$$= \log(\sqrt{9x^2 + 1} + ax)(\sqrt{9x^2 + 1} - ax) = \log(9x^2 + 1 - a^2x^2) = 0 = \log 1$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 1 - a^2x^2 = 1 \Rightarrow 9x^2 = a^2x^2 \Rightarrow 9 = a^2 \Rightarrow a = \pm 3$$

۳. کدام تابع یک به یک است؟

- ۱ (۱) $y = x^2 + 1$ ۲ (۲) $y^3 = x^2 + 1$ ۳ (۳) $y^3 = x^3 + 1$ ۴ (۴) $y = \sin x$

پاسخ: گزینه ی «۳»: تابع گزینه ی (۱) زوج و لذا یک به یک نیست.

تابع گزینه ی (۲) نیز زوج است و یک به یک نیست.

تابع گزینه ی (۴) پیوسته و متناوب است، لذا یک به یک نیست.

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۴. کدام تابع یک به یک است؟

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ -2x & x < 1 \end{cases} \quad (۱) \quad y = x^3 + 1 \quad (۲) \quad y = x^3 - x \quad (۳) \quad y = x^2 \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی «۱»: تابع گزینیه ی (۱) تابعی است اکیداً صعودی و لذا یک به یک است. (شکل (۱))

تابع گزینیه ی (۲) تابعی است غیر یک به یک، زیرا $f(1) = f(-1) = 0$ ، این تابع غیر یکنواست. (شکل (۲))

تابع گزینیه ی (۳) با استفاده از آزمون خط موازی محور x ها غیر یک به یک است.

نکته: در تابع دو ضابطه ای اگر برد ضابطه ها با هم اشتراک داشته باشند تابع یک به یک نیست.

تابع گزینیه ی (۴) غیر یک به یک است، زیرا $f(1) = f(-1) = 1$ ضمناً تابع زوج است. پس غیر یک به یک است.

نکته: تابع زوج روی دامنه خود تابعی است غیر یک به یک است، مگر آن که $f = \{(0, a)\}$ باشد.

۵. وارون تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی $f(x) = 2x + 3$ کدام است؟

$$(۱) \quad 2x + 3 \quad (۲) \quad \frac{1}{2}x + 3 \quad (۳) \quad 2x - 3 \quad (۴) \quad \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

پاسخ: گزینه ی «۴»: $y = 2x + 3 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1} = \frac{x-3}{2}$

۶. حاصل عبارت $2 \cos\left(-\frac{125\pi}{4}\right) + 3 \tan\left(\frac{125\pi}{4}\right) + 4 \cot\left(-\frac{125\pi}{4}\right)$ کدام است؟

$$(۱) \quad -\sqrt{2} - 1 \quad (۲) \quad -\sqrt{2} + 1 \quad (۳) \quad \sqrt{2} - 1 \quad (۴) \quad \sqrt{2} + 1$$

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$\begin{aligned} 2 \cos\left(-\frac{125\pi}{4}\right) + 3 \tan\left(\frac{125\pi}{4}\right) + 4 \cot\left(-\frac{125\pi}{4}\right) &= 2 \cos\left(\frac{125\pi}{4}\right) + 3 \tan\left(\frac{125\pi}{4}\right) - 4 \cot\left(\frac{125\pi}{4}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{12 \cdot \pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) + 3 \tan\left(\frac{12 \cdot \pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) - 4 \cot\left(\frac{12 \cdot \pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 3 \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) - 4 \cot\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3(1) - 4(1) = -\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

۷. اگر $x = \frac{2}{\sin \alpha}$ و $y = 3 \cot \alpha$ مقدار $9x^2$ کدام است؟

$$(۱) \quad 4 + 9y^2 \quad (۲) \quad 9 + 4y^2 \quad (۳) \quad 36 - 4y^2 \quad (۴) \quad 36 + 4y^2$$

پاسخ: گزینه ی «۴»: $9x^2 = 9\left(\frac{4}{\sin^2 \alpha}\right) = 36\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) = 36(1 + \cot^2 \alpha) = 36\left(1 + \frac{y^2}{9}\right) = 36 + 4y^2$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۸. اگر $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ باشد حاصل عبارت $\sqrt{1 + \tan^2 x} - \frac{1}{\cos x}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{\cos x}$ ۲) $\frac{2}{\cos x}$ ۳) $\frac{-2}{\cos x}$ ۴) $\cdot$

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} - \frac{1}{\cos x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} - \frac{1}{\cos x} = \left| \frac{1}{\cos x} \right| - \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = \cdot$$

چون $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \rightarrow \cos x > \cdot$ (در ناحیه ی چهارم $\cos x$ مثبت است)

۹. حاصل $\frac{\sin 3a \cos a}{\sin a} - \cos 3a$ برابر کدام است؟

- ۱) $-\cos a$ ۲) $\cot ga$ ۳) $2 \sin a$ ۴) $2 \cos a$

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\frac{\sin 3a \cos a - \cos 3a \sin a}{\sin a} = \frac{\sin(3a - a)}{\sin a} = \frac{\sin 2a}{\sin a} = \frac{2 \sin a \cos a}{\sin a} = 2 \cos a$$

۱۰. خلاصه شده $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha)$ کدام است؟

- ۱) $-\sin^2 \alpha$ ۲) $\sin^2 \alpha$ ۳) $\cos^2 \alpha$ ۴) $\cdot$

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$= (\cos \alpha)(-\sin \alpha) - (\sin \alpha)(\cos \alpha) = -\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin^2 \alpha$$

۱۱. تابع معکوس تابع $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ کدام است؟

- ۱) $y = 1 - \sqrt[3]{x-1}$ ۲) $y = 1 - \sqrt[3]{x+1}$ ۳) $y = -1 + \sqrt[3]{x-1}$ ۴) $y = -1 - \sqrt[3]{x+1}$

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \rightarrow y = (x+1)^3 + 1 \rightarrow y-1 = (x+1)^3 \Rightarrow$$

$$x = -1 + \sqrt[3]{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x-1}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۱۲. اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x - 4$ مقدار $\frac{(fog)_{(2)}}{(gof)_{(-1)}}$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{7}{3}$ (۲) $-\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$f(x) = 2x + 3, g(x) = x - 4 \Rightarrow g(2) = 2 - 4 = -2$$

$$(fog)(2) = f(g(2)) = f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$gof(-1) = g(f(-1)) = g(-2 + 3) = g(1) = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \frac{(fog)(2)}{(gof)(-1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

۱۳. حدود m برای آن که معادله درجه دوم $x^2 - x + m = 0$ دارای دو ریشه متمایز مثبت کدای است؟

- (۱) $m < \frac{1}{4}$ (۲) $0 < m < \frac{1}{4}$ (۳) $m > 0$ (۴) $m > \frac{1}{4}$ یا $m < 0$

پاسخ: گزینه ی «۲»: برای آن که معادله ی درجه دوم دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز مثبت باشد، لازم است که $\Delta > 0$ و همچنین مجموع و حاصل ضرب ریشه های حقیقی معادله هر دو مثبت باشند.

۱۴. معادله درجه دومی که ریشه هایش $2 + \sqrt{4-a}$, $2 - \sqrt{4-a}$ باشد، کدای است؟

- (۱) $x^2 - 4x + a = 0$ (۲) $x^2 + ax - 4 = 0$ (۳) $x^2 + 4x - a = 0$ (۴) $x^2 - ax + 4 = 0$

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 4 \\ P = x_1 \cdot x_2 = (2 + \sqrt{4-a})(2 - \sqrt{4-a}) = a \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + a = 0 \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ی «۱»:

۱۵. اگر x', x'' ریشه های معادله $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ باشند، مقدار عبارت $x'\sqrt{x''} + x''\sqrt{x'}$ برابر است با:

- (۱) $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ (۲) $2\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ (۳) $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (۴) $2\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

پاسخ: گزینه ی «۴»:

$$A = x'\sqrt{x''} + x''\sqrt{x'} \rightarrow A^2 = x'^2 x'' + x''^2 x' + 2x'x''\sqrt{x'x''}$$

$$A^2 = x'x''(x' + x'') + 2x'x''\sqrt{x'x''}$$

$$A^2 = 2(2\sqrt{3}) + 2(2)\sqrt{2} = 4(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \rightarrow A = 2\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۱۶. در معادله درجه دوم، $x^2 + 2x - 4 = 0$ حاصل $x_1^3 - 2x_2^2 + 4x_2$ کدام است؟ (ریشه‌های معادله درجه دوم هستند).

(۴) -۳۲

(۳) ۱۶

(۲) صفر

(۱) -۱۶

پاسخ: گزینه‌ی «۴»: ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند، لذا:

$$x_1^2 + 2x_1 - 4 = 0 \rightarrow x_1^2 + 2x_1 = 4$$

پس: $x_1^3 + 2x_1^2 = 4x_1 \rightarrow x_1^3 = 4x_1 - 2x_1^2$ در x_1 ضرب

با جایگذاری در خواسته مسئله داریم:

$$x_1^3 - 2x_2^2 + 4x_2 = (4x_1 - 2x_1^2) - 2x_2^2 + 4x_2 = -2(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2)$$

$$= -2(s^2 - 2p) + 4(s) = -2((-2)^2 + 8) + 4(-2) = -24 - 8 = -32$$

۱۷. معادله درجه دومی که هر یک از ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ باشند، کدام است؟

(۲) $x^2 + 5x + \sqrt{6} = 0$

(۱) $x^2 - 5x + 6 = 0$

file99.ie

(۴) $x^2 + 5x + 4 = 0$

(۳) $x^2 + 5x + 6 = 0$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»: S و P معادله جدید را تشکیل می‌دهیم:

$$S_{\text{جدید}} = x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 3 + 2 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 5$$

$$P_{\text{جدید}} = x'^2 \cdot x''^2 = (x' \cdot x'')^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

۱۸. در مورد معادله‌ی $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) - 6 = 0$ کدام گزینه درست است؟

(۴) دو ریشه دارد.

(۳) چهار ریشه دارد.

(۲) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

(۱) ریشه‌ی مضاعف دارد.

پاسخ: گزینه‌ی «۲»: کافی است تغییر متغیر $\frac{x^2}{x^2+1} = y$ را انجام دهیم، داریم:

$$\Rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow (y+3)(y-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} = -3 \\ \frac{x^2}{x^2+1} = 2 \end{cases} \quad \text{غقوق}$$

file99.ie

دقت کنید که $0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1$ ، بنابراین معادله‌ی موردنظر ریشه‌ی حقیقی ندارد.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۱۹. در کدام یک از روابط زیر y تابعی از x است؟

$$y^2 + 2y = x - 1 \quad (۲)$$

$$y^3 + 3y^2 + 2y + x^3 + x = 0 \quad (۱)$$

$$|y|\sqrt[3]{x} = 1 \quad (۴)$$

$$|x| + |y - 1| = 1 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

در گزینه‌ی (۱) که به صورت $y^3 + 3y^2 + 2y + 1 + x^3 + x - 1 = 0$ است (۱ و -۱ اضافه شده است) با استفاده از اتحاد داریم.

$$(y+1)^3 = 1 - x - x^3 \Rightarrow y+1 = \sqrt[3]{1-x-x^3} \Rightarrow y = -1 + \sqrt[3]{1-x-x^3}$$

تابع است

گزینه‌ی (۲) به صورت $(y+1)^2 = x$ یا $y+1 = \pm\sqrt{x}$ است که تابع نیست.

گزینه‌ی (۳) یک مربع است. مثلاً برای $x=0$ برای y دو جواب خواهید داشت. و برای گزینه‌ی (۴) هم با انتخاب $x=1$ دو جواب برای y دارید.

۲۰. رابطه $\{(x, y) | x^3 + y^2 - 2y = 0\}$ در مجموعه اعداد حقیقی داده شده است دامنه‌ی این رابطه برابر است با:

$$(1, \infty) \quad (۴)$$

$$(-\infty, 1] \quad (۳)$$

$$(-\infty, 1) \quad (۲)$$

$$[1, \infty) \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$x^3 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow (y-1)^2 - 1 + x^3 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -x^3 + 1 \Rightarrow y-1 = \pm\sqrt{1-x^3} \Rightarrow 1-x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

۲۱. اگر $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ ، $f'(x) = x^2$ و $x > 0$ آن گاه ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

$$x^2 + 1 \quad (۴)$$

$$x^2 - 1 \quad (۳)$$

$$x + 1 \quad (۲)$$

$$x - 1 \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»: پس ابتدا fog را تشکیل داده و سپس معکوس آن را محاسبه می‌کنیم.

$$(fog)_{(x)} = 1 + \sqrt{x^2} = 1 + |x| \quad \underline{\underline{x > 0}} \Rightarrow 1 + x$$

لذا معکوس $y = x + 1$ برابر است با $x - 1$ پس:

$$g^{-1} \circ f^{-1} = x - 1$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۲۲. اگر $f(x) = 2x + 2a$ و $g(x) = x^2 + bx + c$ و $(f \circ g)(x) = 2x^2 + x + 1$ آنگاه $a + b + c$ چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۳

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 2a \\ g(x) = x^2 + bx + c \end{cases} \Rightarrow f(g(x)) = 2g(x) + 2a = 2(x^2 + bx + c) + 2a \Rightarrow (f \circ g)(x) = 2x^2 + x + 1$$

$$2x^2 + 2bx + 2c + 2a = 2x^2 + x + 1$$

تساوی فوق باید برای تمام مقادیر x برقرار باشد، لذا باید ضریب x^2 و ضریب x و اعداد ثابت در دو طرف تساوی یکسان باشند.

$$\begin{cases} 2b = 1 & \text{ضریب } x \\ 2c + 2a = 1 & \text{عدد ثابت} \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a + c + b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

۲۳. اگر $f(x) = 4x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ باشد، دامنه تعریف $(g \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (۴) $[-1, 1)$

پاسخ: گزینه ی «۱»

file99.ie

$$f(x) = 4x^2 - 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$$

$$-1 \leq 4x^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 4x^2 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۴. تابع با کدام ضابطه فرد است؟

- (۱) $y = \frac{2^{2x} + 1}{2^x}$ (۲) $y = \frac{2^{2x} - 1}{2^x}$ (۳) $y = x \times 2^x$ (۴) $y = x \log x$

پاسخ: گزینه ی «۲»: در گزینه ی (۴)، دامنه ی تابع $x > 0$ ، دامنه ی تابع غیر متقارن است پس نه فرد و نه زوج است. در گزینه های (۱) شرط لازم فرد بودن یعنی $f(0) = 0$ برقرار نیست. در گزینه های (۲) و (۳) باید $f(1) + f(-1) = 0$ باشد که تنها در گزینه ی (۲) برقرار است.

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۲۵. کدام تابع زیر با تابع $y = x + 1$ برابر است؟

$$(۱) \quad y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (۲) \quad y = 1 + \sqrt{x^2} \quad (۳) \quad y = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad (۴) \quad y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»: دامنه‌ی تابع R است پس گزینه‌ی (۱) قابل قبول نیست زیر دامنه‌ی آن $R - \{1\}$ است. گزینه‌های (۲) و (۴) نیز با تابع $y = x + 1$ برابر نیستند زیرا:

$$(۲): y = 1 + |x|$$

$$(۴): y = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

$$y = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x(x^2 + 1) + (x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x + 1)}{x^2 + 1} = x + 1, \quad x^2 + 1 \neq 0.$$

در (۳)

۲۶. اگر f و h توابعی معکوس پذیر و $h(x) = -3f(2x)$ آنگاه $h^{-1}(x)$ کدام است؟

$$(۱) \quad \frac{1}{3}f^{-1}(2x) \quad (۲) \quad -3f^{-1}(2x) \quad (۳) \quad \frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) \quad (۴) \quad \frac{1}{2}f^{-1}\left(-\frac{x}{3}\right)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$h(x) = -3f(2x) = y \Rightarrow \begin{cases} y = h(x) \xrightarrow{\text{از طرفین}} h^{-1}(y) = x & (۱) \\ y = -3f(2x) \rightarrow \frac{-y}{3} = f(2x) \xrightarrow{\text{از طرفین}} f^{-1}\left(-\frac{y}{3}\right) = 2x \rightarrow x = \frac{1}{2}f^{-1}\left(-\frac{y}{3}\right) & (۲) \end{cases}$$

از (۱) و (۲) داریم.

$$h^{-1}(y) = \frac{1}{2}f^{-1}\left(-\frac{y}{3}\right) \rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1}{2}f^{-1}\left(-\frac{x}{3}\right)$$

۲۷. در صورتی که باقی مانده تقسیم $ax^6 + bx^3 + 1$ بر $x^2 + 1$ برابر ۱ باشد باقیمانده تقسیم $x^3 + ax + 2b$ بر $x + 2$ کدام است؟

$$(۱) -۴ \quad (۲) -۲ \quad (۳) ۲ \quad (۴) ۴$$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$f(x) = a(x^3)^2 + b(x^3) + 1 = a(-1)^2 + b(-1) + 1 = 1 \rightarrow a - b = 0$$

$$f(-2) = 4 - 2a + 2b = 4 - 2(a - b) = 4$$

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x^3 = x$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۲۸. اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ بخش پذیر باشد $f(\sin x)$ بر کدام یک از عبارت های زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $\sin^2 x$ (۲) $\sin 2x$ (۳) $\cos^2 x$ (۴) $\cos 2x$

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$f(x) = (1 - 2x^2)Q(x)$$

$$f(\sin x) = (1 - 2\sin^2 x)Q(\sin x) = (\cos 2x)Q'(x)$$

یادآوری: $1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$

۲۹. حاصل عبارت $\cos\left(\text{Arcsin}\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $-\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: گزینه ی «۲»

فرض کنید $\text{Arcsin} \frac{4}{5} = \alpha$ پس: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. می خواهیم $\cos \alpha$ را بیابیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

توجه کنید α در ناحیه اول است و $\cos \alpha$ مثبت است.

یادآوری: $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin} x$, $-1 \leq x \leq 1$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\alpha \in R$

۳۰. کدام یک از روابط a و b برقرار باشد تا دوره ی تناوب تابع $f(x) = \cos ax \cos bx - \sin ax \sin bx$ برابر π باشد؟

- (۱) $a - b = 1$ (۲) $a - b = 2$ (۳) $a + b = 1$ (۴) $a + b = 2$

پاسخ: گزینه ی «۴»

با استفاده از دستور مثلثاتی $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ رابطه را ساده می کنیم و سپس دوره ی تناوب را می یابیم.

$$f(x) = \cos(a + b)x \rightarrow T = \frac{2\pi}{a + b} = \pi \rightarrow a + b = 2$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۳۱. خارج قسمت تقسیم عبارت $x^3 - 2x^2 + (x+1)^3$ بر $x^2 - 1$ چقدر است؟

- (۱) $x^2 + 1$ (۲) $x + 1$ (۳) $2x$ (۴) $(x+1)^2$

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$(x-1)^2(x+1) + 2x^2 - 2x = (x-1)^2(x^2-1) + 2x(x^2-1) = (x^2-1)[(x-1)^2 + 2x]$$

چون عبارت شامل عامل (x^2-1) است، پس باقی مانده تقسیم صفر است و خارج قسمت $(x-1)^2 + 2x$ یعنی $x^2 + 1$ می باشد.

۳۲. مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم $x^3 - 10x^2 + 3x - 1$ بر $3x - 1$ کدام است؟

- (۱) -3 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

پاسخ: گزینه ی «۱» : کافی است $Q(1)$ را محاسبه می کنیم:

$$3x^3 - 10x^2 = (3x - 1)Q(x) - 1 \xrightarrow{x=1} -7 = 2Q(1) - 1 \Rightarrow Q(1) = -3$$

۳۳. اگر $\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2$ باشد آنگاه مقدار عبارت $\sin^2 x + \cos^4 x$ چقدر است؟

- (۱) 2 (۲) 1 (۳) $2 - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2} - 1$

پاسخ: گزینه ی «۲»: اگر a مثبت باشد، می دانیم:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$a + \frac{1}{a} = 2 \rightarrow a = 1$$

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos x = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^4 x = 1 + 0 = 1$$

$$\frac{-\sin x + \sin 2x - \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 4x}$$

۳۴. حاصل کسر برابر است با:

- (۱) $\tan x$ (۲) $\tan 2x$ (۳) $-\tan x$ (۴) $-\tan 2x$

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$\frac{-\sin x + \sin 2x - \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 4x} = \frac{-\sin x - 2\sin x \cos 3x}{\cos x + 2\cos x \cos 3x} = -\frac{\sin x(1 + 2\cos 3x)}{\cos x(1 + 2\cos 3x)} = -\tan x$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۳۵. اگر $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right), 3\cos x + \sqrt{3}\sin x = 3$ چقدر است؟

- (۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

پاسخ: گزینه ی «۴»

راه اول:

$$3\cos x + \sqrt{3}\sin x = 3 \rightarrow \sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3} \rightarrow \sin x + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cos x =$$

$$\sqrt{3} \rightarrow \frac{\sin x \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos x}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{\sin(x + 60^\circ)}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \sin(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos(90^\circ - (x + 60^\circ)) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\cos(30^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۶. حاصل عبارت $2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\sin^2 x$ (۲) $-\cos^2 x$ (۳) $-\sin^2 x$ (۴) $\cos^2 x$

پاسخ: گزینه ی «۳»

راه اول: $\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$ می دانیم:

$$2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - \cos^2 x (1 + \tan^2 x) = 2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) - 1 =$$

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right) = -\sin^2 x$$

راه دوم: اگر در عبارت $x = \frac{\pi}{4}$ قرار دهیم:

$$2\cos^2\left(\frac{6\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 - \frac{1}{2}(1 + 1) = -1$$

اگر در گزینه ها $x = \frac{\pi}{4}$ قرار دهیم، گزینه ۳، ۱- می شود.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۳۷. حاصل $\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) + \cos 2x \cos 2y$ برابر است با :

(۴) $\cos(2x+2y)$

(۳) $2 \cos 2x \cos 2y$

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

راه اول: اگر $y=0$ و $x=\frac{\pi}{6}$ را فرض کنیم ، خواهیم داشت:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+0\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}-0\right) + \cos\frac{\pi}{3}\cos 0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

راه دوم: $\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y) + \cos 2x \cos 2y =$

$$\frac{1-\cos(2x+2y)}{2} + \frac{1-\cos(2x-2y)}{2} + \frac{1}{2}(\cos(2x+2y) + \cos(2x-2y)) =$$

$$\frac{1}{2}(2 - \cos(2x+2y) - \cos(2x-2y) + \cos(2x+2y) + \cos(2x-2y)) = 1$$

file99.ie

۳۸. اگر $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ و $\tan \alpha = k$ باشد آنگاه $\tan \frac{\alpha}{2}$ چقدر است؟

(۴) $\frac{-1 \pm \sqrt{1+k}}{k}$

(۳) $\frac{-1 + \sqrt{1+k^2}}{k}$

(۲) $\frac{-1 \pm \sqrt{1+k^2}}{k}$

(۱) $\frac{-1 - \sqrt{1+k^2}}{k}$

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \rightarrow k = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \rightarrow k - k \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \tan \frac{\alpha}{2} \rightarrow$$

$$k \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \tan \frac{\alpha}{2} - k = 0$$

$$\rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+k^2}}{k}$$

چون $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ آنگاه $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ و $\tan \frac{\alpha}{2}$ مثبت است و $k = \tan \alpha$ هم مثبت است. پس:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1+k^2}}{k}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدانی

۳۹. حاصل عبارت $\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$ کدام است؟

۱ (۴)

$\sin 20^\circ$ (۳)

$\cos 20^\circ$ (۲)

۱- (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

راه اول:

$$8 \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ = 8 \times \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ) \cos 20^\circ = 8 \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \cos 40^\circ \right) \cos 20^\circ =$$

$$-2 \cos 20^\circ + 4 \cos 40^\circ \cos 20^\circ = -2 \cos 20^\circ + 4 \times \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) =$$

$$-2 \cos 20^\circ + 2 \cos 60^\circ + 2 \cos 20^\circ = 2 \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

راه دوم: عبارت را در $\sin 20^\circ$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{2 \times 2 \times 2 \overbrace{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}^{\sin 40^\circ} \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \times 2 \overbrace{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}^{\sin 80^\circ} \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin (180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 1$$

۴۰. عبارت $\tan \left(3 \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{2} \right)$ برابر است با:

$\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$-\sqrt{3}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم: $\operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ و $\operatorname{Arccos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ، بنابراین:

$$\tan \left(3 \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{2} \right) = \tan \left(3 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۴۱. $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

با فرض $\text{Arcsin}\frac{3}{5} = \alpha$ داریم: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و α در ناحیه اول دایره مثلثاتی است. $\cos \alpha$ را می‌خواهیم. می‌دانیم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

توجه کنید در ربع اول کسینوس مثبت است.

file99.ie

$$\cos\left(\text{Arcsin}\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = \cos\left(-\text{Arcsin}\frac{4}{5}\right) = \cos\left(\text{Arcsin}\frac{4}{5}\right)$$

۴۲. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ جواب‌های کلی معادله‌ی کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$

۴۳. معادله‌ی $\tan 3x = \tan 2x$ در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\tan 3x = \tan 2x \Rightarrow 3x = k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

پس معادله سه ریشه دارد.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۴۴. تمام جواب‌های معادله‌ی $\tan 3x - \cot 2x = 0$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \quad (۲)$$

$$\frac{2k\pi}{5} \quad (۱)$$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

می‌دانیم

پس :

$$\tan 3x = \cot 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$3k = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

پس :

۴۵. یکی از جواب‌های معادله‌ی $\sin 2x \cos 5x + \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{14} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{21} \quad (۲)$$

$$\frac{\pi}{42} \quad (۱)$$

پاسخ : گزینه‌ی «۱»

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

می‌دانیم

پس :

$$\sin(2x + 5x) = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin 7x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & (۱) \\ 7x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} & (۲) \end{cases}$$

در معادله‌ی (۱) به ازای $k = 0$ ، جواب $7x = \frac{\pi}{6}$ یعنی $x = \frac{\pi}{42}$ به دست می‌آید.

۴۶. اگر $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$ آن گاه کدام رابطه‌ی زیر همواره درست است؟

$$\tan x - \cot x < 0 \quad (۴) \quad \tan x - \cot x > 0 \quad (۳) \quad \tan x + \cot x < 0 \quad (۲) \quad \tan x + \cot x > 0 \quad (۱)$$

پاسخ : گزینه‌ی «۲»

کمان x در ناحیه‌ی دوم است. پس $\tan x < 0$ و $\cot x < 0$ لذا $\tan x + \cot x < 0$.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۴۷. یکی از ریشه‌های معادله‌ی $\cos \Delta x = 2 \cos^2 x - 1$ کدام است؟

$$\frac{4\pi}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{\pi}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{3\pi}{7} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم $2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x$ پس:

$$\cos \Delta x = \cos 2x \Rightarrow \Delta x = 2k\pi \pm 2x$$

$$\Delta x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\Delta x = 2k\pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{4} \quad (۲)$$

به ازای $k=2$ در معادله‌ی دوم، گزینه‌ی (۴) به دست می‌آید.

۴۸. معادله‌ی $\sin x \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه دارد؟

$$\text{صفر} \quad (۴)$$

$$۲ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

برای حل معادله‌ی $\sin x \cdot \cos x = \cos^2 x - \frac{1}{2}$ ابتدا طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$\sin 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \cos 2x \xrightarrow{\text{تقسیم بر } \cos 2x} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$$

$$\rightarrow \tan 2x = 1 \rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow x = \frac{\pi}{8} \\ k=1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{8} \\ k=2 \rightarrow x = \frac{9\pi}{8} \\ k=3 \rightarrow x = \frac{13\pi}{8} \end{cases}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۴۹. جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin 3x + \sin x = 0$ کدام است؟

(۱) $k\frac{\pi}{2}$ (۲) $k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$

پاسخ: گزینه ی «۱»

با استفاده از دستور مثلثاتی $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$ داریم:

$$\sin 3x + \sin x = 0 \rightarrow 2 \sin 2x \cos x = 0 \rightarrow 4 \sin x \cdot \cos^2 x = 0$$

پس جواب های معادله ی $\sin x = 0$ و $\cos x = 0$ هستند که کلیه ی کمان های x به صورت مضربی از ربع دایره ها است، لذا جواب کلی

$$x = \frac{k\pi}{2} \text{ است.}$$

۵۰. جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1$ به کدام صورت است؟

(۱) $\frac{k\pi}{3}$ (۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

پاسخ: گزینه ی «۳»: راه اول: با شرط $\sin x \neq 0$ ، طرفین معادله را در $\sin x$ ضرب می کنیم. لذا:

$$\sin 3x + \sin x = \sin x \rightarrow \sin 3x = 0 \rightarrow 3x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

اما چون ریشه های مخرج یعنی $k\pi$ باید حذف شود. جواب کلی $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ خواهد بود.

راه دوم: با استفاده از فرمول تبدیل جمع به ضرب داریم:

$$\frac{2 \sin 2x \cos x}{\sin x} = 1 \rightarrow \frac{2(2 \sin x \cos x) \cos x}{\sin x} = 1$$

با شرط $\sin x \neq 0$ داریم:

$$4 \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۵۱. حاصل $\cos x \cdot \cos 2x$ به ازای $x = 36^\circ$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

پاسخ: گزینه ی «۳»: صورت و مخرج را در $\sin x$ ضرب و تقسیم می کنیم:

$$\frac{\sin x \cos x \cdot \cos 2x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{4} \sin 4x}{\sin x} = \frac{\frac{1}{4} \sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\frac{1}{4} \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{4}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۵۲. دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x) = 2\left[\frac{x}{2}\right] - 3\left[\frac{x}{3}\right]$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۶ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳» X : اضافه و کم کنید.

$$y = 2\left[\frac{x}{2}\right] - x - \left(3\left[\frac{x}{3}\right] - x\right) = 2\left(\left[\frac{x}{2}\right] - \frac{x}{2}\right) - 3\left(\left[\frac{x}{3}\right] - \frac{x}{3}\right)$$

$$T_1 = 2 \quad T_2 = 3 \quad \rightarrow \quad T_{\text{کل}} = [2, 3] = 6$$

۵۳. دوره تناوب اصلی تابع $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ کدام است؟

- ۱) 2π ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) متناوب نیست.

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$y = \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 2 \cos x, \quad x \neq k\pi \rightarrow T = 2\pi$$

۵۴. در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع دو جمله‌ی اول برابر $7/5$ و مجموع جملات سوم و چهارم، برابر $5/5$ است. قدر نسبت آن کدام است؟

- ۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی «۲»: براساس فرمول $a_n = a_1 + (n-1)d$ در تصاعد حسابی داریم:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 7/5 \\ a_3 + a_4 = 5/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + d) = 7/5 \\ (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 5/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + d = 7/5 \\ 2a_1 + 5d = 5/5 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{-1}{2}$$

۵۵. بین اعداد ۱۲- و ۵۲ سه واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. مجموع این سه واسطه‌ی حسابی چقدر است؟

- ۱) ۶۰ ۲) ۶۴ ۳) ۶۸ ۴) ۷۲

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$d = \frac{52 - (-12)}{3 + 1} = \frac{64}{4} = 16$$

لذا جملات به صورت زیر خواهند بود:

$$-12, 4, 20, 36, 52$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad | \\ = 4 + 20 = \end{array} \quad \text{جمع}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۵۶. جملات پنجم و نهم از تصاعد حسابی به ترتیب برابر ۱ و ۷ می‌باشد، مجموع ۱۲ جمله‌ی اول آن کدام است؟

۳۹ (۴)

۴۲ (۳)

۳۶ (۲)

۳۳ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

طبق معلومات مسأله داریم:

$$\begin{cases} a_5 = 1 \\ a_9 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 1 \\ a_1 + 8d = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{3} \\ a_1 = -5 \end{cases}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2} \left[2(-5) + (12-1)\frac{2}{3} \right] \Rightarrow S_{12} = 6 \left(-10 + \frac{22}{3} \right) = 39$$

۵۷. هرگاه داشته باشیم $S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ مقدار S چقدر است؟

۵ (۴)

۴۹ (۳)

۵۰ (۲)

۵۵ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$S = 10^2 - 9^2 + 8^2 - 7^2 + \dots + 2^2 - 1^2 = (10-9)(10+9) + (8-7)(8+7) + \dots + (2-1)(2+1) = 10+9+8+\dots+1$$

$$S = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

اما مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با $\frac{n(n+1)}{2}$ پس:

۵۸. در یک تصاعد هندسی، جمله سوم مساوی است با جمله دوم به علاوه دو برابر جمله اول، کدام دو عدد می‌تواند قدر نسبت این تصاعد باشند؟

-۲ و ۱ (۴)

۲ و ۱ (۳)

۲ و -۱ (۲)

-۲ و -۱ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم جمله n ام تصاعد هندسی از رابطه‌ی $a_n = aq^{n-1}$ به دست می‌آید، بنابراین:

$$a_3 = a_2 + 2a_1 \Rightarrow aq^2 + 2a = a(q^2 - q - 2) = 0 \Rightarrow a(q-2)(q+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

۵۹. در یک تصاعد هندسی جمله دوم، شش و جمله پنجم چهار برابر جمله سوم است جمله اول آن چقدر است؟

± 3 (۴)

فقط -۳ (۳)

فقط ۳ (۲)

$\pm \frac{1}{3}$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

$$t_2 = 6, t_5 = 4t_3 \Rightarrow t_1 q^4 = 4t_1 q^2 \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2 \Rightarrow t_2 = 6$$

$$\Rightarrow t_1 q = 6 \Rightarrow t_1 (\pm 2) = 6 \Rightarrow t_1 = \pm 3$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۶۰. حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی چهار برابر جمله ی اول است، قدر نسبت این تصاعد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$S = \frac{a}{1-q}$$

اگر جمله اول را a مشخص کنیم، در این صورت حد مجموع به صورت خواهد بود که :

$$\frac{a}{1-q} = 4a \Rightarrow 1-q = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{3}{4}$$

۶۱. در یک تصاعد هندسی جمله ی اول ۱۶ و حد مجموع جملات $\frac{32}{3}$ می باشد. جمله چهارم آن کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ :

$$S = \frac{a}{1-q}$$

پاسخ : گزینه ی «۲» : مشخص کنیم جمله اول a در این صورت حد مجموع آن به صورت خواهد بود. بنابراین :

$$\frac{32}{3} = \frac{16}{1-q} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{1-q} \Rightarrow 1-q = \frac{3}{2} \rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

$$= a_4 = a_1 q^3 = 16 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -2$$

جمله چهارم

۶۲. در یک تصاعد عددی $S_n = \frac{1}{3} n^2$ (مجموع n جمله اول)، مجموع جمله های نهم و دهم و یازدهم این تصاعد کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۹ (۳) ۸ (۴) ۱۸

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_8}_{S_8}, a_9, a_{10}, a_{11} \Rightarrow a_9 + a_{10} + a_{11} = S_{11} - S_8 = \frac{1}{3} (11^2 - 8^2) = 19$$

۶۳. در یک تصاعد عددی که ۸۰ جمله دارد مجموع سه جمله اول ۶ و مجموع سه جمله ی آخر ۲۴ است، مجموع هشتاد جمله ی این تصاعد کدام است؟

- (۱) ۲۰۰ (۲) ۴۰۰ (۳) ۶۰۰ (۴) ۸۰۰

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_{78} + a_{79} + a_{80}) = 24 + 6 \Rightarrow a_1 + a_{80} = a_2 + a_{79} = a_3 + a_{78} = 10$$

$$S_{80} = \frac{80}{2} (a_1 + a_{80}) = 40 \times 10 = 400$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۶۴. اگر $\log_{16} N = \frac{3}{2}$ ، کدام است N ؟

۶۴ (۴)

۳۲ (۳)

۸ (۲)

$\frac{1}{8}$ (۱)

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\log_{16} N = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_{2^4} N = \frac{1}{4} \log_2 N = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 N = 6 \Rightarrow N = 2^6 = 64$$

راه اول :

$$\log_{16} N = \frac{3}{2} \Rightarrow N = 16^{\frac{3}{2}} = (2^4)^{\frac{3}{2}} = 2^6 = 64$$

راه دوم:

۶۵. اگر $\log_n^N = x$ باشد، $\log_{a^n}^N$ کدام است؟

$\frac{x}{n}$ (۴)

nx (۳)

$\sqrt[n]{x}$ (۲)

x^n (۱)

پاسخ : گزینه ی «۴»

$$\log_{a^n} N = \frac{1}{n} \log_a N = \frac{1}{n} x = \frac{x}{n}$$

۶۶. اگر $\log_{3^{500}}^{\frac{1}{3^{500}}} = A$ باشد، آنگاه :

$5 < A < 6$ (۴)

$-6 < A < -5$ (۳)

$4 < A < 5$ (۲)

$-5 < A < -4$ (۱)

پاسخ : گزینه ی «۳»

$$3^5 < 500 < 3^6 \rightarrow 3^{-6} < \frac{1}{500} < 3^{-5} \rightarrow -6 < \log_3 \frac{1}{500} < -5$$

۶۷. برد تابع f با ضابطه ی $f(x) = x^3 - 12x + 8$ بر بازه ی $[-3, 1]$ کدام است؟

$[-3, 24]$ (۴)

$[-3, 17]$ (۳)

$[-8, 24]$ (۲)

$[-8, 17]$ (۱)

پاسخ : گزینه ی «۴» : چون تابع، همواره پیوسته است پس با یافتن ماکزیمم و می نیمم مطلق در این بازه برد تابع را می یابیم.

$$f(x) = x^3 - 12x + 8$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = -2$$

$$f(-2) = 17, \quad f(-2) = 24, \quad f(1) = -3 \rightarrow R_f = [-3, 24]$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۶۸. برد تابع با ضابطه‌ی $y = \left[\frac{x^3 + 1}{x^3 - 8} \right]$ شامل چند عدد صحیح است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳»: با فرض $g(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$ ، ابتدا برد داخل جزء صحیح را می‌یابیم:

$$g = \frac{3x}{x^2 + 1} \rightarrow gx^2 + g = 3x \rightarrow gx^2 - 3x + g = 0$$

$$\Delta \geq 0 \rightarrow \Delta = 9 - 4g^2 \geq 0 \rightarrow g^2 \leq \frac{9}{4} \rightarrow -\frac{3}{2} \leq g \leq \frac{3}{2}$$

file99.ie

حال باید اعداد صحیح را در این بازه بیابیم:

$$\rightarrow y = [g(x)] \Rightarrow R_y = \{-2, -1, 0, 1\}$$

بنابراین برد تابع شامل ۴ عدد صحیح می‌باشد.

۶۹. برد تابع با ضابطه‌ی $y = x - 6\sqrt{x}$ چند عدد صحیح منفی را شامل می‌شود؟

۹ (۴)

۳۶ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۴»: با کمک روش مربع کامل کردن برد را می‌یابیم:

$$y = x - 6\sqrt{x} = (\sqrt{x} - 3) - 9$$

از آنجا که $(\sqrt{x} - 3)^2 \geq 0$ خواهیم داشت:

$$(\sqrt{x} - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 3)^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow y \geq -9$$

بنابراین برد تابع شامل ۹ عدد صحیح منفی $\{-9, -8, \dots, -1\}$ است.

۷۰. برد تابع با ضابطه‌ی $y = (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8})$ کدام است؟

$[3, +\infty)$ (۴)

$[10, +\infty)$ (۳)

$[\sqrt{3}, +\infty)$ (۲)

$[0, +\infty)$ (۱)

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

تابع y ، از تابع با ضابطه $yu_1 = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8}$ و $y_2 = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$ تشکیل شده است، دامنه تابع حاصل ضرب،

اشتراک دامنه‌ی آنهاست که $x \geq 1$ خواهد بود هر دو تابع به ازای $x \geq 1$ ، مثبت و صعودی خواهند بود. (مشتق بگیرید)

$$(y'_2 > 0, y'_1 > 0)$$

file99.ie

لذا تابع حاصل ضرب آنها نیز صعودی است پس برد تابع نقاط ابتدا و انتهای دامنه خواهند بود.

$$f(1) = 10, \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty \rightarrow R_f = [10, +\infty)$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

سوالات دنباله اعداد

$$a_n = \frac{(n^2 + 2n - 1)^3 - (n^2 - n - 1)^3}{(2n + 1)(n + 1)^4}$$

۱. دنباله‌ی به کدام عدد همگراست؟

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{9}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n - 1)^3 - (n^2 - n - 1)^3}{(2n + 1)(n + 1)^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(3n^4 + \dots + 3)}{2n^5 + \dots + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^5}{2n^5} = \frac{9}{2}$$

$$\left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right\}$$

۲. دنباله‌ی به کدام عدد همگراست؟

$$\frac{3}{2} \quad (4) \text{ صفر}$$

$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}$$

file99.ie

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = \frac{1 + 0}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2n - 7}{5n - 14}$$

۳. دنباله‌ی چند جمله‌ی منفی دارد؟

$$(4) \text{ بی شمار}$$

$$(3) \text{ صفر}$$

$$(2) \text{ ۲}$$

$$(1) \text{ ۱}$$

پاسخ: گزینه ی «۱»

باید $a_n < 0$ باشد پس $\frac{2n - 7}{5n - 14}$ با تعیین علامت $\frac{14}{5} < n < \frac{7}{2}$ اما چون باید $n \in \mathbb{N}$ باشد ، فقط $n = 3$ قابل قبول است.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۴. کوچکترین جمله ی دنباله ی $a_n = \left(-\frac{3}{7}\right)^{n+1}$ کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$ (۲) $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$ (۳) $\left(-\frac{3}{7}\right)^4$ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$a_n = \left(-\frac{3}{7}\right)^{n+1}$$

جملات دنباله $\Rightarrow \left(-\frac{3}{7}\right)^2, \left(-\frac{3}{7}\right)^3, \left(-\frac{3}{7}\right)^4, \left(-\frac{3}{7}\right)^5, \dots$

با توجه به جملات دنباله، کوچکترین جمله $a_2 = \left(-\frac{3}{7}\right)^3$ است. توجه کنید که در این دنباله، جملات با شماره های زوج، منفی هستند

و کوچکترین آنها $\left(-\frac{3}{7}\right)^3$ است، با افزایش شماره ی جمله، جمله های با شماره ی زوج، بزرگتر شده و به صفر نزدیک می شوند.

همچنین جملات با شماره ی فرد، مثبت هستند و بزرگترین آنها $\left(-\frac{3}{7}\right)^2$ است، با افزایش شماره ی جمله، جمله های با شماره ی فرد کوچکتر شده و به صفر نزدیک می شوند.

۵. کدام دنباله همگراست؟

(۱) $\left[\frac{n}{3}\right](\cos n + \sin n)$ (۲) $\sin n - \cos n$

(۳) $\left[\frac{-3}{n}\right](\cos n + \sin n)$ (۴) $\left[\frac{3}{n}\right](\cos n + \sin n)$

پاسخ: $-\sqrt{2} < \cos n \pm \sin n < \sqrt{2}$ بنابراین کران دار است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{n}\right](\cos n + \sin n) = 0 \quad (\text{کران دار}) \times$$

۶. کدام عدد زیر وجود دارد؟

- (۱) کوچکترین عدد صحیح کوچکتر از ۱- (۲) کوچکترین عدد گنگ بزرگتر از ۱-
(۳) بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از ۱- (۴) بزرگترین عدد گویای کوچکتر از ۱-

پاسخ: گزینه ی «۳» بزرگ ترین عدد صحیح کوچک تر از ۱- وجود دارد و برابر ۲- است.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۷. رابطه‌ی $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است اگر $U_1 = U_2 = 1$ باشد، جمله‌ی نهم این دنباله کدام است؟

۳۲ (۴)

۳۳ (۳)

۳۴ (۲)

۳۵ (۱)

پاسخ: گزینه ی «۲»: دنباله ی داده شده ، دنباله ی فیبوناتچی است،

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ...

که جمله ی نهم دنباله $U_9 = 34$ است.

۸. اگر جملات دنباله‌ی $\left\{ \frac{3}{2^n} \right\}$ برای مقادیر $n \geq n_0$ در بازه‌ی $(0, 0.1875)$ قرار گیرند، کوچکترین مقدار n_0 کدام است؟

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

پاسخ: گزینه «۳»: حد دنباله صفر است پس دنباله به صفر همگراست، پس:

$$\left| \frac{3}{2^n} - 0 \right| < 0.1875$$

$$\frac{3}{2^n} < \frac{1875}{10000} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{625}{10000} \Rightarrow 2^n > \frac{10000}{625} = 16$$

$$\Rightarrow 2^n > 2^4 \Rightarrow n > 4 \Rightarrow n_0 = 5$$

۹. برای مقادیر $n > 31$ ، جملات دنباله‌ی $\left\{ \frac{n-2}{4n} \right\}$ در کدام بازه است؟

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right) \quad (۴)$$

$$\left[\frac{15}{64}, \frac{1}{4} \right) \quad (۳)$$

$$\left[\frac{15}{64}, \frac{17}{64} \right] \quad (۲)$$

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{17}{64} \right] \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$a_n = \frac{n-2}{4n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n}$$

$$n \geq 32 \rightarrow 2n \geq 64 \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2n} \geq \frac{-1}{64} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{64} \Rightarrow \frac{15}{64} \leq a_n < \frac{1}{4}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدانی

۱۰. جملات دنباله‌ی $\left\{ \frac{2n-1}{3n+2} \right\}$ برای مقادیر $n \geq n_0$ در بازه‌ی $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{66} \right)$ قرار می‌گیرند کوچکترین مقدار n_0 کدام است؟

۱۱۹ (۴)

۱۱۸ (۳)

۱۱۷ (۲)

۱۱۶ (۱)

پاسخ: گزینه «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$

دنباله‌ی فوق صعودی است، پس جمله‌ای از دنباله نیست که بزرگتر از $\frac{2}{3}$ باشد، بنابراین، شعاع همگرایی برابر است با:

$$\varepsilon = \frac{2}{3} - 0.066 = \frac{2}{3} - \frac{66}{1000} = \frac{2}{3000}$$

$$\left| \frac{2n-1}{3n+2} - \frac{2}{3} \right| < \frac{2}{3000}$$

file99.ie

$$\Rightarrow \frac{7}{3(3n+2)} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3n+2}{7} > 0.5$$

$$\Rightarrow 3n+2 > 3.5 \Rightarrow 3n > 1.5 \Rightarrow n > 0.5 \Rightarrow n \geq 1$$

۱۱. جملات دنباله‌ی $a_n = \frac{n+2(-1)^n}{2n+1}$ برای اعداد $n \geq M$ همگی در بازه‌ی $(\frac{1}{49}, \frac{1}{51})$ قرار می‌گیرند کوچکترین عدد طبیعی M کدام است؟

۱۲۶ (۴)

۱۲۴ (۳)

۱۰۰ (۲)

۷۵ (۱)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

پاسخ: گزینه «۳» از آنجایی که $\frac{1}{2}$ پس یک همسایگی به مرکز $\frac{1}{2}$ و شعاع 0.01 داریم، دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$n: \left| \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left| \frac{3}{2n+1} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{2n+1}{3} > 0.5$$

$$\Rightarrow 2n+1 > 1.5 \Rightarrow n > \frac{149}{2} = 74.5 \Rightarrow M_1 \geq 75$$

$$n: \left| \frac{n+2}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left| \frac{5}{2n+1} \right| < 0.5 \Rightarrow \frac{2n+1}{5} > 0.5$$

$$\Rightarrow \frac{2n+1}{5} > 0.5 \Rightarrow n > \frac{249}{2} = 124.5 \Rightarrow M_2 \geq 125$$

جملات ردیف زوج از شماره‌ی ۷۵ به بعد در این بازه قرار دارند و جملات شماره‌ی فرد از شماره‌ی ۱۲۵، پس اولین جمله‌ای از این دنباله که بعد از آن کلیه‌ی جملات در این بازه قرار گیرند جمله‌ی ۱۲۴ ام است.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

$$- \left\{ \frac{2^{3n+2} + 8^{n+1}}{2^{3n+1} + 8^n} \right\}$$

۱۲. دنباله‌ی

(۴) واگراست .

(۳) همگرا به ۴ است.

(۲) همگرا به ۸ است.

(۱) همگرا به ۲ است.

پاسخ : گزینه «۳»

$$a_n = \frac{2^{3n+2} + 8^{n+1}}{2^{3n+1} + 8^n} = \frac{8^n \cdot (4) + 8^n \cdot (8)}{8^n \cdot (2) + 8^n} = \frac{12(8^n)}{3(8^n)} = 4$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

$$U_n = \frac{1}{1 - \left[\frac{-1}{n} \right]}$$

همگراست به:

۱۳. دنباله‌ی

(۴) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۱) $-\frac{1}{2}$

پاسخ : گزینه «۳»

$$\forall n \in N, -1 \leq -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{n} \right] = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{n} \right]} = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

file99.ie

$$a_n = \left\{ \sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 + 2n} \right\}$$

به کدام عدد همگراست؟

۱۴. دنباله‌ی

(۴) -۱ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱) صفر

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 4n - n^2 - 2n}{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 + 2n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n + n} = 1$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۱۵. کدام دنباله به صفر همگراست؟

$$\left\{ \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n-1} \right\} \quad (۱) \quad \left\{ \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \right\} \quad (۲)$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{9n+1}} \right\} \quad (۳) \quad \left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی «۴»: زیرا وقتی $n \rightarrow +\infty$ ، رشد 2^n بسیار بیش تر از n^2 می باشد.

۱۶. کدام دنباله واگراست؟

$$\left\{ \frac{n + \sin n}{n - \sin n} \right\} \quad (۱) \quad \left\{ (n^2)^{(-1)^{n-1}} \right\} \quad (۲)$$

$$\left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) \right\} \quad (۳) \quad \left\{ \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی (۴) واگرا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] = \begin{cases} 0, & n \Rightarrow 0 \neq 1 \\ 1, & n \end{cases}$

۱۷. در کدام مجموعه ی زیر از اعداد حقیقی، یکی از کران های پائین در خود مجموعه است؟

$$\{x: x|x| \leq -1\} \quad (۱) \quad \{x: [x] = 2\} \quad (۲)$$

$$\{x: [-x] = -2\} \quad (۳) \quad \{x: 2-x \geq |x|\} \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی «۲» $\{x: [x] = 2\} = \{x: 2 \leq x < 3\} = \{2, 3\}$

کران های پایین این مجموعه، مجموعه ی $(-\infty, 2]$ است. همانطور که مشاهده می شود عدد ۲ یکی از کران های پایین مجموعه ی (۳)، ۲ می باشد که در این مجموعه نیز قرار دارد.

۱۸. اگر مجموعه ی $\left\{ \frac{1}{x} | x \in A \right\}$ کران دار باشد، A کدام مجموعه ی زیر می تواند باشد؟

$$Q \quad (۱) \quad Z - \{0\} \quad (۲) \quad R - Q \quad (۳) \quad (0, 1] \quad (۴)$$

پاسخ: گزینه ی «۲» در $Z - \{0\}$ اعضای مجموعه عبارتند از:

$$\dots, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$$

لذا مجموعه کران دار است.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۱۹. کوچکترین کران بالای $A = \{n \in \mathbb{Z} | n = -x^2 - 8x, x \in \mathbb{R}\}$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) ۴ (۳) ۱۶ (۴) -۱۶

پاسخ: گزینه ی « ۳ »

$$y = -(x^2 + 8x) = -(x + 4)^2 + 16$$

$$\Rightarrow y \leq 16 \Rightarrow n \leq 16 \Rightarrow \sup(A) = 16$$

۲۰. کدام دنباله از بالا و پائین کران دار و نزولی است؟

(۱) $u_n = \frac{2^n}{n^2}$ (۲) $u_n = (-1)^n$ (۳) $u_n = \frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}$ (۴) $u_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 4}$

پاسخ: گزینه ی « ۳ »

دنباله ی $\frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}$ همگرا به یک است و کران دارد.

با افزایش n ، $n^2 + 1$ افزایش، پس $\frac{2}{n^2 + 1}$ کاهش می یابد و کل عبارت نزولی خواهد بود و دنباله ی $u_n = 1 + \frac{2}{n^2 + 1}$ نزولی خواهد بود.

۲۱. بزرگترین کران پائین دنباله با جمله ی عمومی $U_n = \frac{3^n}{n^3}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ی « ۳ »

با نوشتن چند جمله ای دنباله، خواهیم داشت:

$$3, \frac{9}{8}, 1, \underbrace{\frac{27}{64}, \frac{81}{125}}_{\text{صعودی نزولی}}, \dots$$

با توجه به مقادیر، دیده می شود که در این دنباله، از جمله ی سوم به بعد دنباله صعودی خواهد بود، پس بزرگترین کران پایین آن جمله ی سوم یعنی $u_3 = 1$ خواهد بود.

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۲۲. کوچکترین کران بالای دنباله ی با جمله عمومی $U_n = \frac{3n^2 - 2n}{4n^2 + 5}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ : گزینه « ۴ »

این دنباله صعودی است $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{3}{4}, U_n : \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, \dots$

بنابراین حد دنباله یعنی $\frac{3}{4}$ کوچک ترین کران بالای دنباله است.

۲۳. دنباله ی $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right\}$ چگونه است؟

- (۱) واگرا (۲) بی کران (۳) نه صعودی، نه نزولی ولی هم گرا (۴) نزولی و هم گرا

پاسخ : گزینه ی « ۳ »

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) = 1 + \frac{-1, 1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

کران دار $\rightarrow$ دنباله همگرا $\rightarrow$

از طرفی جملات دنباله روند یکنوایی ندارد . دنباله نه صعودی و نه نزولی است.

۲۴. کدام دنباله صعودی و کران دار است؟

- (۱) $U_n = \frac{n^2 + 1}{n+2}$ (۲) $U_n = \frac{n^2 + 2}{n+1}$ (۳) $U_n = \cos \frac{\pi}{n}$ (۴) $U_n = \cos \frac{n\pi}{2}$

پاسخ : گزینه ی « ۳ » در گزینه ی « ۳ » وقتی $n = 1$ است ، جواب -1 و وقتی $n = 2$ جواب صفر و وقتی n زیاد می شود، $\frac{\pi}{n}$ به سمت صفر میل می کند. پس حد دنباله عدد یک و دنباله صعودی است.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۲۵. دنباله‌ی $u_n = n \left(\frac{2}{3} \right)^n$ برای $n \geq 2$ چه نوع دنباله‌ای است؟

- (۱) صعودی - کران‌دار از بالا و پائین
(۲) نزولی - کران‌دار از بالا و پائین
(۳) صعودی - فقط از پائین کران‌دار
(۴) نزولی - فقط از بالا کران‌دار

پاسخ: گزینه ی «۲» ابتدا چند جمله ای اول دنباله را می نویسیم:

$$u_n = n \left(\frac{2}{3} \right)^n \Rightarrow u_n > 0$$

$$u_2 = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \Rightarrow u_2 > \frac{1}{9}$$

$$u_3 = 3 \left(\frac{2}{3} \right)^3 \Rightarrow u_3 > \frac{1}{9}$$

$$u_4 = 4 \left(\frac{2}{3} \right)^4 \Rightarrow u_4 > \frac{64}{81}$$

با توجه به جملات، دنباله نمی تواند صعودی باشد، پس با توجه به گزینه ها دنباله نزولی می شود و چون دنباله دارای کران پایین است. (جملات همواره مثبت هستند). هر دنباله ی نزولی که کران پایین دارد همگرا می شود، الزاماً دنباله همگرا است. پس کراندار نیز می باشد، یعنی کران پایین و بالا دارد.

۲۶. اگر دنباله‌ی $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ و تابع $f(x) = (x+1)[x]$ مفروض باشند آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگراست؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

پاسخ: گزینه ی «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$$

برای این که ببینیم دنباله ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم تر از ۲ به ۲ نزدیک می شود یا بیشتر، کافیست $a_n - 2$ را وقتی $n \rightarrow \infty$ بررسی کنیم:

$$(a_n - 2) = \left(\frac{2n+1}{n+2} - 2 \right) = \frac{-3}{n+2}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی، $\frac{-3}{n+2}$ مقداری منفی است پس $a_n = 2 < 0$ و در نتیجه $a_n < 2$. بنابراین دنباله ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم تر از ۲ به ۲ نزدیک می شود.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{a_n \rightarrow 2^-} (a_n) = \lim_{x \rightarrow 2^-}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1)[x] = (2+1)[2^-] = 3$$

لذا:

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۲۷. کدام توصیف در دنباله‌ها درست است؟

- (۱) هر دنباله‌ی صعودی واگراست. (۲) هر دنباله‌ی غیریکنوا واگراست.
(۳) هر دنباله‌ی کران‌دار همگراست. (۴) هر دنباله‌ی همگرا کران‌دار است.

پاسخ: گزینه ی «۴»

۲۸. اگر $f(x) = \frac{[x]-3}{x-4}$ و $a_n = \frac{4n-3}{n+2}$ آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟

- (۱) همگرا به ۱- (۲) همگرا به صفر (۳) همگرا به ۱ (۴) واگرا

پاسخ: گزینه ی «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{n+2} = 4$$

$$(a_n - 4) = \left(\frac{4n-3}{n+2} - 4 \right) = \frac{-11}{n+2}$$

بنابراین a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می شود.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x]-3}{x-4} = \frac{3-3}{4^- - 4} =$$

صفر مطلق

صفر حدی

لذا:

پس دنباله ی $f(a_n)$ همگرا به صفر است.

$$a_n = \frac{3n+1}{2n+1} \quad \text{۲۹. دنباله‌ی}$$

- (۱) نزولی و همگرا است. (۲) صعودی و واگراست. (۳) صعودی و همگراست. (۴) نزولی و واگراست.

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$a_n = \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{\frac{3}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}}{2n+1} \Rightarrow a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

با توجه به تساوی اخیر، با افزایش n مقدار a_n افزایش می یابد، پس دنباله صعودی است، همچنین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{دنباله همگرا است.}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۳۰. اگر $a_n = \frac{2n^2 + b}{n^2 + 3n}$ و $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ به ازای کدام مقدار b دنباله $\{f(a_n)\}$ همگرا است؟

(۴) هیچ مقدار b

(۳) هر مقدار b

(۲) ۶

(۱) ۳

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + b}{n^2 + 3n} = 2$$

$$\left(\frac{2n^2 + b}{n^2 + 3n} - 2 \right) = \left(\frac{-6n + b}{n^2 + 3n} \right) = \frac{-6n}{n^2} = \frac{-6}{n}$$

بنابراین دنباله با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ میل می کند یعنی $a_n < 2$ است.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{(x-2)(x+1)}$$

اما:

دامنه ی تابع از حل نامعادله ی $(x-2)(x+1) \geq 0$ به دست می آید. یعنی:

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

بنابراین: وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$

بنابراین دنباله ی $\{f(a_n)\}$ واگراست و به ازای هیچ مقداری از b همگرا نخواهد بود.

۳۱. اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ و $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ باشند، آنگاه دنباله ی $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگراست؟

(۴) همگرا نیست.

(۳) ۱

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) صفر

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{a_n}{2} \right\rfloor$$

$$n : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{\frac{1}{2n}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 0^+ \right\rfloor = 0$$

زوج

$$n : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{\frac{1}{2n}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 0^- \right\rfloor = -1$$

فرد

بنابراین دنباله ی $\{f(a_n)\}$ همگرا نیست.

سوالات ریاضی و آمار استخدای

$$a_n = \frac{1}{n^3 + 3n} \quad \text{۳۲. دنباله ی}$$

- (۱) نزولی و همگراست. (۲) نزولی و واگراست. (۳) صعودی و همگراست. (۴) صعودی و واگراست.

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 + 3n} = 0 \rightarrow \text{دنباله هم گراست.}$$

هم چنین می دانیم اگر a_n دنباله ی صعودی و مثبت باشد $\frac{1}{a_n}$ دنباله ی نزولی است. پس چون $a_n = n^3 + 3n$ صعودی است. لذا:

$\frac{1}{n^3 + 3n}$ نزولی است. پس دنباله هم گرا و نزولی است.

$$a_n = \sqrt{n^2 + 4n + 5} - n \quad \text{۳۳. دنباله ی}$$

- (۱) صعود و هم گراست. (۲) صعودی و واگراست. (۳) نزولی و هم گراست. (۴) نزولی و واگراست.

پاسخ: گزینه ی «۳»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2 + 4n + 5} - n\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{\sqrt{(n+2)^2 + 1} - n\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 2 - n) = 2 \Rightarrow \text{دنباله همگرا}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2, a_1 = \sqrt{1 + 4 + 5} - 1 = \sqrt{10} - 1$$

در این سوال:

$$a_1 > \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{چون پس دنباله نزولی است.}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۳۴. دنباله ی $\left\{ \frac{1+2^n}{3+2^{n-1}} \right\}$ چگونه است؟

- (۱) کران دار - نزولی (۲) کران دار - صعودی (۳) بی کران - نزولی (۴) بی کران - صعودی

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^n}{3+2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n-1}} = 2$$

دنباله ی داده شده همگراست پس کراندار نیز هست.

با توجه به گزینه ها دنباله یا صعودی است یا نزولی، از طرفی چون جمله ی اول آن برابر با یک $(a_1 = \frac{3}{4})$ و حد دنباله ۲ می باشد. پس می توان نتیجه گرفت که جملات این دنباله در حال افزایش بوده و دنباله صعودی است.

۳۵. کدام دنباله فقط از پائین کران دار است؟

$u_n = \frac{n^2+1}{n+3}$ (۴)
 $u_n = \frac{1}{n}$ (۳)
 $u_n = (-1)^n$ (۲)
 $u_n = \frac{n+3}{n+2}$ (۱)

پاسخ : گزینه ی «۴»

در گزینه ی «۴» جملات از عدد $\frac{1}{2}$ شروع و به بی نهایت ختم می شوند، پس کران پایین دارد ولی کران بالا ندارد.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

سوالات مشتق و حد

۱. در تابع $y = [2x] + [-x]$ وقتی $x \rightarrow \frac{1}{2}$ مجموع حد چپ و راست کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینه «۲» - از عددگذاری استفاده می کنیم، برای $x \rightarrow \frac{1}{2}^-$ ، عدد ۰/۴۹ را انتخاب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0.5^-} ([2x] + [-x]) = [2(0.49)] + [-0.49] = 0 - 1 = -1$$

برای $x \rightarrow \frac{1}{2}^+$ ، عدد ۰/۵۱ را انتخاب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0.5^+} ([2x] + [-x]) = [2(0.51)] + [-0.51] = 1 - 1 = 0$$

۲. حاصلضرب حد چپ و راست تابع با ضابطه $f(x) = [x] + \operatorname{sgn} x$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] + \operatorname{sgn} x)$$

$$= [0^+] + \operatorname{sgn}(0^+) = 0 + 1 = 1$$

file99.ie

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + \operatorname{sgn} x)$$

$$= [0^-] + \operatorname{sgn}(0^-) = -1 - 1 = -2$$

۳. در تابع برکت $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ وقتی $x \rightarrow \frac{-1}{10}$ حد چپ کدام است؟

- ۱) ۱۱ ۲) -۹ ۳) -۱۰ ۴) -۱۱

پاسخ: گزینه ی «۳»

یعنی، $x < \frac{-1}{10}$ پس $\frac{1}{x} > -10$ ، لذا:

$$\left[\frac{1}{x} \right] = -10$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۴. به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & x \geq -1 \\ 2x+1 & x < -1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = -1$ حد دارد؟

- (۱) $\{0\}$ (۲) $\{2\}$ (۳) ϕ (۴) R

پاسخ: گزینه ی «۳»: برای آن که تابع f در نقطه ی $x = -1$ حد داشته باشد باید:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+a)^2 = (a-1)^2$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (2x+1) = -1$$

file99.ie

$$(a-1)^2 = -1$$

لذا باید:

از آن جایی که معادله ی بالا جواب حقیقی برای a ندارد، پس مجموعه مقادیر a تهی است.

۵. اگر تابع f در نقطه $x=1$ حد داشته و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ی «۲»: فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$ باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f(x)+1} = 5 \Rightarrow \frac{2A-1}{A+1} = 5 \Rightarrow 2A-1 = 5A+5$$

$$\Rightarrow 2A = -6 \Rightarrow A = -3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$$

۶. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & ; x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & ; x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) موجود نیست.

پاسخ: گزینه ی «۲» برای محاسبه حد چپ تابع $f(x^3 - x)$ در $x = 0$ ، ابتدا ضابطه ی تابع را در همسایگی چپ $x = 0$ به دست می آوریم:

اگر $0 < x < 1$ باشد، $x^3 > x$ است، بنابراین $x^3 - x > 0$ ، لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} = 1$$

file99.ie

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۷. حد کسر $\frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow 1^+$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: : گزینه ی «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام عامل صفر شونده را حذف می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

۸. حد عبارت $\frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2}$ وقتی $x \rightarrow -2$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

۰

file99.ie

پاسخ: : گزینه ی «۴» : حد تابع ابهام ۰ دارد .

برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$HOP : \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

۹. اگر $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax+2a}{1-\sqrt{5x+16}} = 2$ وقتی $x \rightarrow -3$ آنگاه a کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۵

پاسخ: : گزینه «۴»

۰

حد تابع ابهام ۰ دارد . با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم :

$$HOP : \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a}{-\frac{5}{2\sqrt{5x+16}}} = \frac{a}{-5} = 2 \Rightarrow a = -5$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۱۰. حد عبارت $\frac{\sqrt[n]{n}-1}{x\sqrt{x}-1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ی «۴» : حد تابع ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$HOP: \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{x^2}} - 0}{\frac{1}{\sqrt{x}} - 0} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

file99.ie

۱۱. حد عبارت $\frac{x^3+x-2}{\sqrt{x}-1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) ۴ (۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ی «۴» : حد تابع ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$HOP: \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2+1}{\frac{1}{3\sqrt{x^2}}} = \frac{3+1}{\frac{1}{3}} = 12$$

۱۲. حد عبارت $\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ: گزینه ی «۲» : برای رفع ابهام ابتدا باید قدر مطلق را با علامت مناسب تعیین علامت کنیم از آنجایی که:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

بنابراین وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، عبارت داخل قدر مطلق منفی است، لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$HOP: \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(2x-1)}{2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2+12}}} = \frac{-(4-2)}{2 - \frac{2}{4}} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۱۳. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) موجود نیست

پاسخ: گزینه ی «۱»

وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، آنگاه $|\sin x| = -\sin x$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1$$

file99.ir

۱۴. حد کسر $\frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\tan x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ∞ (۴) ۱

پاسخ: گزینه ی «۱» : حد تابع ابهام $\frac{0}{0}$ دارد. با استفاده از هم ارزی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x+1} = 2$$

۱۵. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ی «۴» : با توجه به اتحاد $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ ، می توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2$$

۱۶. حد کسر $\frac{\sin 2x \cdot \cos x - \sin 2x}{x^3}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ∞

پاسخ: گزینه ی «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \left(\frac{-x^2}{2} \right)}{x^3} = -1$$

با استفاده از هم ارزی مثلثاتی داریم:

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۱۷. حد تابع با ضابطه‌ی $\frac{1-|\cos x|}{|\sin x| \sin x}$ وقتی $x \rightarrow 0^-$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ی «۴»

وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، یعنی کمان در ناحیه ی چهارم است و در ناحیه چهارم $\cos x > 0$, $\sin x < 0$ ، لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-|\cos x|}{|\sin x| \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos x}{(-\sin x) \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{-x^2} = -\frac{1}{2}$$

۱۸. حد عبارت $\frac{\tan^3 x \sqrt{1-\cos 4x}}{x^3 + x^2}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۶ (۴) $6\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 3x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 3x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{x} = -2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x \times 2\sqrt{2} |x|}{x^3 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\sqrt{2} x^2}{x^3 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\sqrt{2} x^2}{x^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\sqrt{2}}{1+x} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۹. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ: گزینه «۱»

به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ ابهام $\frac{0}{0}$ را داریم، لذا با استفاده از قاعده ی هسپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(1+\tan^2 x)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-(1+\infty)}{1} = -2$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۲۰. حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(1 - \tan x)^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ∞

پاسخ: گزینه ی «۱»: از آنجایی که پس:

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)^2 \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

۲۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$ کدام است؟

- (۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}} = \frac{0}{0}$$

ابتدا قدرمطلق را با علامت مناسب برمی داریم، وقتی $x > \frac{1}{2}$ آنگاه پس کمان در ناحیه ی دوم است و در ناحیه دوم کسینوس منفی است. بنابراین $|\cos \pi x| = -\cos \pi x$ لذا:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{-\cos \pi x}{1 - \sqrt{2x}}$$

با استفاده از قاعده ی هوییتال داریم:

$$\text{HOP: } \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\pi \sin \pi x}{0 - \frac{2}{2\sqrt{2x}}} = \frac{\pi}{-1} = -\pi$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(1 - \tan x)^2}$$

۲۲. حاصل کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ∞

پاسخ: گزینه ی «۱»

از آنجایی که پس:

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)^2 \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$$

۲۳. حاصل کدام است؟

- (۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

file99.ie

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}} = \frac{0}{0}$$

ابتدا قدرمطلق را با علامت مناسب برمی داریم، وقتی $x > \frac{1}{2}$ آنگاه پس کمان در ناحیه ی دوم است و در ناحیه دوم کسینوس منفی است. بنابراین $|\cos \pi x| = -\cos \pi x$ لذا:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{-\cos \pi x}{1 - \sqrt{2x}}$$

با استفاده از قاعده ی هوییتال داریم:

$$\text{HOP: } \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\pi \sin \pi x}{0 - \frac{2}{2\sqrt{2x}}} = \frac{\pi}{-1} = -\pi$$

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۲۴. در فاصله $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] - \{1\}$ ، همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x) \right) = 0$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $-\pi$ (۲) صفر (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) π

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin \pi x}{1-x} - g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

اما با استفاده از قاعده ی هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} : \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \pi x}{-1} = \frac{\pi(-1)}{-1} = \pi$$

لذا با استفاده از قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} \leq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \pi$$

پس :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \pi$$

file99.ie

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

۲۵. تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

- (۱) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته (۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته
(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته (۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$f(0) = 0$ و تابع کران دار $\times$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

از آن جایی که پس تابع در $x = 0$ پیوسته است و در نتیجه از چپ و راست در $x = 0$ پیوسته است.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x + |x|} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

۲۶. تابع با ضابطه‌ی $x=0$ در $X=0$ چگونه است؟

(۱) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

(۴) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

پاسخ: گزینه ی «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2x + x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{2x + |x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2x - x} = 1$$

و $f(0) = 1$ ، پس تابع در $x=0$ پیوستگی چپ دارد ولی پیوستگی راست ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} & , x > 1 \\ ax - a + 3 & , x \leq 1 \end{cases}$$

۲۷. تابع با ضابطه‌ی $x=1$ به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ی $X=1$ پیوسته است؟

(۱) فقط $\frac{1}{2}$

(۲) فقط ۲

(۳) هیچ مقدار a

(۴) هر مقدار a

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ باید}$$

باشد، لذا :

$$\text{HOP} : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$$

با استفاده از قاعده ی هوپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 3) = 3 = f(1)$$

و

می بینیم که حدچپ و راست ومقدار در $x=1$ به ازای هر مقدار a برابر است .

۲۸. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [2 \sin x]$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{2}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

(۱) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

(۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [2 \sin x] = [2(\frac{\pi}{2})] = [2] = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[2 \sin \frac{\pi}{2}\right] = 2$$

بنابراین تابع در این نقطه نه از راست پیوسته است و نه از چپ.

سوالات ریاضی و آمار استخدای

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-2}}{x^2-4} & x > 2 \\ k & x = 2 \\ \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2} & x < 2 \end{cases}$$

۲۹. تابع با ضابطه‌ی در $x=2$ پیوستگی چپ دارد، آنگاه:

(۱) $k=0$ (۲) $k=\frac{1}{12}$ (۳) $k=\frac{1}{8}$ (۴) $k=\frac{1}{6}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

پاسخ: گزینه ی «۲»

با استفاده از قاعده ی هوییتال داریم:

$$\text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}} - 0}{1} = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}}{1} = \frac{1}{12}$$

$$k = \frac{1}{12}$$

پس .

file99.ie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & ; x > 0 \\ a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

۳۰. تابع با ضابطه‌ی به ازای کدام مقدار a در $x=0$ پیوسته است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) هیچ مقدار a (۴) هر مقدار a

پاسخ: گزینه ی «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$1 - \cos u \approx \frac{u^2}{2}$$

برای رفع ابهام با استفاده از هم ارزی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

$$\frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor$$

۳۱. تابع با ضابطه‌ی

- (۱) فقط پیوستگی چپ دارد. (۲) فقط پیوستگی راست دارد. (۳) پیوسته نیست. (۴) پیوسته است.

پاسخ: گزینه ی «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor \right)$$

$$= \left\lfloor \frac{2^+}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2^++1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 1^+ \right\rfloor - \left\lfloor 1^+ \right\rfloor = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor \right)$$

$$= \left\lfloor \frac{2^-}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2^-+1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 1^- \right\rfloor - \left\lfloor 1^- \right\rfloor = 0 - 0 = 0$$

$$f(2) = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2+1}{3} \right\rfloor = 1 - 1 = 0$$

بنابراین تابع در $x=2$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x & , 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 3x & , \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

۳۲. به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی

روی بازه‌ی $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

- (۱) $\frac{-3}{2}$ (۲) $\frac{-1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$x = \frac{\pi}{4}$$

باید تابع در مرز ناحیه یعنی $\frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد، لذا:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (a + \sin^2 x) = a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = a + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} (\sqrt{2} \cos 3x) = \sqrt{2} \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} \right) = -1 = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a + \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

پس:

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} & x > 1 \\ ax + a + 4 & x \leq 1 \end{cases}$$

۳۳. تابع f با ضابطه‌ی به ازای کدام مقدار a در R پیوسته است؟

(۱) هیچ مقدار a (۲) هر مقدار حقیقی a

(۳) فقط $a=0$ (۴) فقط $a=4$

پاسخ: گزینه ی «۳»

تابع ضابطه ی بالا به ازای $x > 1$ پیوسته است و تابع ضابطه ی پایین نیز به ازای $x < 1$ پیوسته است، لذا برای پیوستگی تابع در R کافی است، تابع در $x=1$ پیوسته باشد، لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} = -$$

برای رفع ابهام از قاعده ی هوپیتال استفاده می کنیم:

$$\text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + a + 4) = 2a + 4 = f(1)$$

لذا:

$$4 = 2a + 4 \Rightarrow a = 0$$

file99.ie

۳۴. تابع $y = [\sqrt{3x}]$ در بازه‌ی $[3, 48]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۱

(۲) ۱۰

(۱) ۹

پاسخ: گزینه ی «۱»: نمودار تابع $g(x) = \sqrt{3x}$ به صورت زیر است، با توجه به نمودار دیده می شود که تابع همواره صعودی است و تابع

$f(x) = [g(x)]$ در نقاطی ناپیوسته خواهد بود که $\sqrt{3x}$ عددی صحیح و مثبت شود، بنابراین:

$$\sqrt{3x} = k \geq 0 \Rightarrow 3x = k^2$$

از آن جایی که $3 \leq x \leq 48$ است پس $9 \leq 3x \leq 144$ است، لذا تابع در اعداد مربع کامل در این فاصله ناپیوسته است، یعنی:

۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱، ۱۰۰، ۱۴۴، ۱۲۱

اما تابع در ابتدای بازه یعنی $x = 3$ از راست پیوسته است (دقت کنید که تابع اکید است) و در $x = 48$ (انتهای بازه) ناپیوسته است. زیرا باید در این نقطه پیوستگی چپ داشته باشد، از آن جایی که تابع اکیدا صعودی است، در این نقطه پیوستگی راست خواهد داشت بنابراین تابع در این بازه در ۹ نقطه ناپیوسته است.

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۳۵. نمودار تابع براك $y = [2 \sin x]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارد؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

پاسخ: گزینه ی «۲»

ابتدا نمودار تابع $y = 2 \sin x$ را رسم می کنیم، نمودار این تابع همانند نمودار تابع $y = \sin x$ است فقط عرض هر نقطه را دو برابر می کنیم، نقاط ناپیوستگی تابع نقاطی می توانند باشند که محل تلاقی خط های $y = k (k \in \mathbb{Z})$ با نمودار هستند، مگر در نقاطی که تابع در آن نقاط می نیمم نسبی باشد یا احتمالا در نقاط ابتدا و انتهای بازه باشد، از ۹ نقطه ی تلاقی، تابع در نقطه ی A پیوسته است (به دلیل آن تابع در این نقطه پیوستگی راست دارد) و در نقطه ی B تابع f می نیمم نسبی دارد، پس تابع $y = [2 \sin x]$ در این نقطه پیوسته است، لذا تابع در ۷ نقطه در این بازه ناپیوسته است.

۳۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = (x-3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right]$ روی بازه‌ی $(0, 9)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ی «۱»

تابع $(x-3)$ در R پیوسته است، لذا نقاط ناپیوستگی تابع $\left[\frac{x-3}{3} \right]$ را می یابیم، بنابراین باید $\frac{x-3}{3} = k$ یا $(k \in \mathbb{Z}) x = 3k$ ، که در این بازه نقاط ۳ و ۶ می توانند نقاط ناپیوستگی تابع باشند، اما در $x = 3$ تابع پیوسته است (بدلیل وجود عامل صفر شونده ی $x = 3$ در کنارش):

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left[\frac{1}{3}x - 1 \right] = (3-3) [0^+] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right] = (3-3) [0^-] = 0 \quad f(3) = 0$$

بنابراین در این بازه، تابع در یک نقطه ناپیوسته است.

file99.ie

۳۷. تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x]^2 - [x]$ روی بازه‌ی $(-1, 2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینه ی «۱»

$$f(x) = [x]([x] - 1), x \in (-1, 2)$$

تابع $[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، یعنی در این بازه، تابع در نقاط ۰ و ۱ ناپیوسته است، پیوستگی تابع را در این دو نقطه بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [x]([x] - 1) = [0^+]([0^+] - 1) = 0 \times -1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x]([x] - 1) = [0^-]([0^-] - 1) = -1 \times (-2) = 2$$

$$f(0) = 0$$

تابع $x=1$ پیوسته است. بنابراین تابع در این بازه در یک نقطه ناپیوسته است.

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۳۸. ریشه‌ی معادله $x^3 + x + 1 = 0$ در کدام فاصله است؟

- (۱) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ (۲) $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ (۳) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (۴) $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

پاسخ: گزینه ی «۲»

تابع $f(x) = x^3 + x + 1$ تابعی پیوسته در R است، معادله ی $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$ در بازه ای حتما ریشه خواهد داشت که حاصل ضرب مقادیر آنها منفی باشد، لذا:

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64} + \frac{1}{4} + 1 > 0$$

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{8} - \frac{1}{2} + 1 > 0$$

$$f\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-1}{64} - \frac{1}{4} + 1 > 0$$

$$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-27}{64} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{-11}{64} < 0$$

بنابراین با امتحان گزینه ها:

file99.ie

$$(1) f(0) f\left(\frac{1}{4}\right) > 0$$

$$(2) f\left(\frac{-3}{4}\right) f\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$$

$$(3) f\left(\frac{-1}{2}\right) f\left(\frac{-1}{4}\right) > 0$$

$$(4) f\left(\frac{-1}{4}\right) f(0) > 0$$

بنابراین ریشه ی معادله در بازه ی $\left(\frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}\right)$ خواهد بود.

سوالات ریاضی و آمار استخدای

۳۹. ریشه‌ی معادله‌ی $\sin x = \frac{x}{3}$ در کدام بازه است؟

- (۱) $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ (۲) $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$ (۳) $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$ (۴) $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right)$

پاسخ: گزینه ی «۲»

$$f(x) = \sin x - \frac{x}{3} = 0$$

$$(1) \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{9} > 0 \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9} > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9} > 0 \\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} < 0 \end{cases}$$

file99.ie

بنابراین در گزینه ی (۲)، $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$ لذا معادله ی $\sin x - \frac{x}{3} = 0$ در این بازه حداقل یک ریشه دارد.

۴۰. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $x^4 - 4x + 1 = 0$ در کدام بازه است؟

- (۱) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$ (۳) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ (۴) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

پاسخ: گزینه ی «۳»: به کمک نتیجه ی قضیه ی مقدار میانی می‌توانیم در بازه های داده شده ریشه ی مورد نظر را بیابیم. برای این منظور از کوچک ترین بازه شروع می‌کنیم:

$$f(x) = x^4 - 4x + 1 = 0$$

$$(1) \begin{cases} f(0) = 0^4 - 4(0) + 1 = 1 > 0 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 - 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 > 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 > 0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 - 4\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{81} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{-26}{81} < 0 \end{cases}$$

چون $f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ پس معادله $f(x) = 0$ حداقل یک ریشه در این بازه دارد، می‌توان ثابت کرد که این معادله یک ریشه قبل از ۱ و یک ریشه بعد از ۱ دارد.

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۴۱. یکی از ریشه‌های حقیقی معادله $(a+2)x^2 - 7x + 4 = a$ بین دو عدد ۱ و ۱- است مجموعه‌ی مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{a: a < -2\}$ (۲) $\{a: a > 4\}$ (۳) ϕ (۴) R

پاسخ: گزینه ی «۴»

می دانیم اگر f تابعی پیوسته در بازه ی $[a, b]$ باشد و $f(a)f(b) < 0$ آنگاه معادله ی $f(x)=0$ در بازه ی (a, b) حداقل یک ریشه دارد، لذا:

$$f(x) = (a+2)x^2 - 7x + 4 - a = 0$$

باید $f(1)f(-1) < 0$ باشد، لذا:

$$f(1) = (a+2) - 7 + 4 - a = -1$$

$$f(-1) = (a+2) + 7 + 4 - a = 13$$

از آنجایی که $f(1)f(-1) = -13 < 0$ پس معادله همواره یک ریشه در بازه ی $(-1, 1)$ به ازای هر مقدار دلخواه a خواهد داشت.

۴۲. اگر $f(x) = \frac{1}{2^x}$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^-} (g \circ f)(x)$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

پاسخ: گزینه ی «۱» : تابع $g \circ f$ را تشکیل می دهیم و سپس حد چپ را در $x=0$ می یابیم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{\frac{1}{2(2^x)} - 3}{\frac{1}{2^x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2(2^x)} - 3}{\frac{1}{2^x} + 1} = \frac{2(2^{-\infty}) - 3}{2^{-\infty} + 1}$$

$$= \frac{2(0) - 3}{0 + 1} = -3$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۴۳. حد کسر $\frac{x^k + x^2 + 1}{x^5 + 3x^2 + 1}$ اگر $x \rightarrow \infty$ برابر است با :

- (۱) فقط $0, 1, \infty$ (۲) فقط $\frac{1}{3}, 1$ (۳) فقط $\frac{1}{3}, 1$ (۴) فقط 0

پاسخ : گزینه ی «۲»

$$k > 5: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k + x^2 + 1}{x^5 + 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{x^5} = \infty$$

$$k = 5: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 + 1}{x^5 + 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{x^5} = 1$$

$$k < 5: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k + x^2 + 1}{x^5 + 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{x^5} = 0$$

۴۴. حد کسر $\frac{x^{m+2} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر ۲- است. کدام $m + n$ کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) 4 (۳) $4/5$ (۴) 5

پاسخ : گزینه «۲»

file99.ie

از آنجایی که $n > 3$ پس $n - 2 > 1$ لذا پر توان مخرج mx^{n-2} است و از آنجایی که حد تابع عددی غیر صفر شده پس در صورت کسر پر توان x^{m+3} خواهد بود، زیرا درجه ی آن باید از ۱ بیش تر باشد، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2$$

با توجه به حد تابع باید:

$$\begin{cases} \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \\ m + 3 = n - 2 \xrightarrow{m = -\frac{1}{2}} \frac{-1}{2} + 3 = n - 2 \rightarrow n = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + n = \frac{-1}{2} + \frac{9}{2} = 4$$

سوالات ریاضی و آمار استخدامی

۴۵. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آنگاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x = -2$ کدام است؟

- $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۱)

پاسخ : گزینه ی «۴»

چون وقتی $x \rightarrow \infty$ عبارت داخل قدر مطلق به $+\infty$ میل می کند بنابراین: $[x^2 - 4] = x^2 - 4$ و در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

حال حد راست عبارت را در $x = -2$ می یابیم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (2)^+} \frac{|x - 2||x + 2|}{-(x^2 + x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (2)^+} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow (2)^+} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید که:

$$x \rightarrow (2)^+ \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$$

$$x \rightarrow (2)^+ \Rightarrow |x + 2| = x + 2$$

۴۶. حد عبارت $\left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{2x+1}{x}}$ وقتی $x \rightarrow \infty$ چقدر است؟

- $e^{\frac{1}{4}}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) صفر (۲) $+\infty$ (۱)

پاسخ : گزینه ی «۳»

file99.ie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 1} \right)^{\frac{2x+1}{x}} = \left(\frac{1}{2} \right)^1 = \frac{1}{2}$$